Dialogo tra fede e cultura nell'insegnamento
Le scienze filosofiche e matematiche

Dopo aver presentato alcune indicazioni sul *Dialogo tra fede e cultura nell'insegnamento delle scienze sperimentali*, fondandomi sui presupposti sia di una teoria generale della conoscenza umana limitata, fallibile e sempre perfettibile che del principio di demarcazione tra le varie forma della conoscenza umana, vengo ora alle conoscenze razionali non controllabili né falsificabili sperimentalmente e, tra queste, affronto le conoscenze filosofica e matematica per proporre un dialogo tra fede e cultura nell'insegnamento delle discipline filosofiche e matematiche

Conoscenze non controllabili né falsificabili sperimentalmente

Inizio lanciando alcune problematiche. Le «due concezioni, che conducono entrambe all'alienazione: quella di un mondo governato da leggi che non lasciano alcun posto alla novità, e quella di un mondo assurdo, acausale, in cui non si può prevedere né descrivere nulla in termini generali» non riescono ad affrontare il concetto di infinito matematico o infinito quantitativo, che porta logicamente a riconoscere i limiti, sempre attuali, della ragione umana. Il tempo è la dimensione creaturale: uscirne significa scoppiare! Dopo circa 300 anni di uso del termine matematico di infinito perveniamo a intravvedere che non lo possiamo mai raggiungere da nessuna delle infinite strade (punti di vista) che possiamo intraprendere.
E che dire di un infinito qualitativo? Il linguaggio umano «impazzisce» quando diventa linguaggio religioso e deve esprimere il mistero: si trova di fronte all'indicibile. Mentre il linguaggio magico vuole il linguaggio come potere, il linguaggio religioso è invocazione, richiesta di aiuto all'Onnipotente: il chiudersi nell'immanenza è un suicidio[1].
Si tratta di una mole immensa di problematiche, le quali non solamente superano il controllo sperimentale, ma ci coinvolgono pienamente fino ad investire la nostra vita in ogni dimensione di essa. Con questo non voglio sostenere che le conoscenze controllabili sperimentalmente non siano importanti e che non abbiano significato dal punto di vista etico e, in generale, per la nostra realizzazione. Tuttavia ho documentato come la mentalità scientista scoppia da ogni parte e non regge di fronte ad un confronto razionale; tralasciando la constatazione che, al di fuori delle teorie falsificabili sperimentalmente, la visione medesima dello scientismo non è falsificabile sperimentalmente, poiché si regge su principi generali assoluti impossibili da falsificare, come vedremo, non meramente dal punto di vista sperimentale.
Venendo ora all'analisi dei problemi di demarcazione, constatiamo anzitutto che possediamo conoscenze non controllabili sperimentalmente: immediatamente, anche per le problematiche che storicamente sono state affrontate, emergono le conoscenze metafisiche; ma, unicamente a titolo esemplificativo, non possiamo trascurare tante nostre conoscenze che hanno riferimento ai valori, alla legge morale, all'esperienza religiosa ed alla matematica. Se la persona umana ha, come diritto costitutivo, la libertà di apprendimento, tale diritto non è limitato alle mere problematiche controllabili sperimentalmente, ma riguarda la previsione e la realizzazione dell'intero progetto di vita, compresa la ricerca della salvezza.
Come controllare tali conoscenze? Per definizione non sono falsificabili sperimentalmente. Nell'indagine di Popper e di Antiseri è emerso che esse sono criticabili razionalmente, cioè sono confutabili sulla base di argomentazioni proporzionate ad esse, logicamente elaborate dalla nostra ragione.
Faccio precedere una presentazione del criterio di demarcazione delle conoscenze filosofiche, poiché esso permetterà di argomentare in maniera compiuta sulle conoscenze matematiche, offrendo la possibilità di un confronto tra conoscenze falsificabili sperimentalmente, conoscenze filosofiche e conoscenze matematiche.

[1] Da una conversazione con Dario Antiseri.

1. La conoscenza filosofica

Coloro che hanno affrontato l'argomento della demarcazione con riferimento alla conoscenza metafisica, presentandone la distinzione dalle conoscenze falsificabili sperimentalmente, sono stati soprattutto Karl Popper e, sviluppandone la proposta, Dario Antiseri.

Dario Antiseri ci ricostruisce l'evoluzione del pensiero di Karl Popper sull'argomento. Anzitutto il problema del superamento del neopositivismo logico: «Le teorie metafisiche non sono non-sensi per il semplice fatto di essere metafisiche, cioè non falsificabili fattualmente. E non è raro trovare teorie metafisiche le quali, con la crescita del sapere di sfondo, si sono trasformate in teorie scientifiche, come anche si sono avute teorie metafisiche supportate da qualche consolidata teoria scientifica. E l'ambito del possibilmente vero è sempre più ampio dell'ambito del attualmente controllabile e controllato».

Emerge immediatamente la problematica sulla quale stiamo riflettendo: «A questo punto, però, si affaccia inevitabile un problema: le teorie metafisiche, e in quanto tale infalsificabili, sono o non sono razionali? La razionalità si estende solo sino a dove arrivano le teorie scientifiche? Solo i discorsi scientifici sono razionali? Un'ipotesi metafisica differisce da un'ipotesi scientifica nella sua pretesa di esser considerata almeno provvisoriamente come vera?».

Antiseri prosegue proponendo lo sviluppo del pensiero di Popper: «A tale fondamentale interrogativo Popper - nel *Poscritto* - risponde: "Non penso più, come un tempo, che ci sia una differenza fra scienza e metafisica su questo importantissimo punto. Ritengo che una teoria metafisica sia simile ad una scientifica. È senz'altro più vaga e inferiore sotto molti altri aspetti, e la sua non confutabilità, o mancanza di controllabilità, è il suo maggior difetto. Ma, *nella misura in cui una teoria metafisica può venir razionalmente criticata*, dovrei essere disposto a prendere sul serio la sua implicita rivendicazione ad essere considerata, almeno provvisoriamente, come vera. E, soprattutto, dovrei essere disposto a valutarla attraverso una stima di questa rivendicazione - considerando dapprima il suo interesse teorico e solo secondariamente la sua utilità pratica (in quanto distinta dalla sua fecondità come programma di ricerca). L'utilità o inutilità pratica si possono ritenere importanti soprattutto perché assomigliano a un controllo della verità - come può spesso darsi in connessione con una teoria scientifica"[2]».

L'affermazione di Popper: «Ritengo che una teoria metafisica sia simile ad una scientifica. È senz'altro più vaga e inferiore sotto molti altri aspetti, e la sua non confutabilità, o mancanza di controllabilità, è il suo maggior difetto» documenta l'inizio dell'evoluzione del pensiero di Popper in materia, con l'apertura a problematiche esistenzialmente più vitali e decisive per la vita umana. Ed è soprattutto su di esse che si è sviluppato il pensiero di Dario Antiseri.

Siamo ora al problema della demarcazione: «Ma - e qui sta il nocciolo del problema - è razionalmente possibile, si domanda Popper, valutare e stimare una teoria non confutabile? Ebbene, a questa cruciale domanda, Popper offre la seguente risposta: "Se una teoria metafisica fosse un'asserzione più o meno isolata, niente più che il prodotto di un'intuizione o di un colpo d'occhio che ci viene proposto con un implicito prendere o lasciare, allora sarebbe effettivamente impossibile discuterla razionalmente. Ma lo stesso potrebbe dirsi di una teoria scientifica. Se qualcuno ci si presentasse con le equazioni della meccanica classica senza spiegarci prima *quali sono i problemi* che esse intendevano risolvere, allora non saremmo in grado di discuterle razionalmente, non più del *libro delle rivelazioni.* Anche se ci venissero presentati gli argomenti di Newton, potremmo non essere in grado di discuterli, senza aver prima sentito parlare dei problemi di Galileo e Keplero e delle loro soluzioni, e dello stesso problema newtoniano di come unificare queste soluzioni derivandole da una teoria più generale"[3]».

Antiseri coglie immediatamente il significato del pensiero di Popper con il rilevare che le teorie non falsificabili sperimentalmente, come le ipotesi metafisiche, si possono *discutere razionalmente:* «Dunque per *discutere razionalmente* una metafisica non bisogna staccarla dal contesto in cui è sorta e si è sviluppata, non bisogna cioè astrarla, tirarla via dai *problemi* che con essa si intendevano

[2] Karl R. Popper, *Poscritto alla logica della scoperta scientifica*, Milano, Il Saggiatore, 1984, vol. 3, p. 203.
[3] Karl R. Popper, *Poscritto alla logica della scoperta scientifica*, Milano, Il Saggiatore, 1984, vol. 3, p. 203.

risolvere (o che, magari, ha intenzionalmente risolto) e dalle altre teorie, idee e valori con i quali essa entra, una volta nata, in contatto. In altre parole - sottolinea ancora Popper - "ogni teoria razionale, non importa se scientifica o metafisica, è tale solo perché è in rapporto con qualcos'altro - perché è un tentativo di risolvere certi problemi, e si può discutere razionalmente solo *in rapporto alla situazione problematica* con cui è collegata. Ogni discussione critica di essa consisterà, soprattutto, nell'esaminare in che misura lo faccia meglio di varie teorie rivali; se non crei delle difficoltà maggiori di quelle che intende dissipare; se la soluzione sia semplice; quanto feconda nel suggerire nuovi problemi e nuove soluzioni, e se non sarebbe eventualmente possibile confutarla mediante controlli empirici. Quest'ultimo metodo non è, beninteso, applicabile se la teoria è metafisica. Ma gli altri metodi possono ben essere applicabili. Ecco perché è possibile la discussione razionale o critica di alcune teorie metafisiche. (Beninteso, possono esserci altre teorie metafisiche che non sono suscettibili di discussione razionale)"[4]».
E' fondamentale chiarire immediatamente che esistono teorie metafisiche suscettibili di discussione razionale ed altre che non lo sono. Vediamone il perché: «Una teoria metafisica non è fattualmente confutabile. E, quantunque non confutabili, esistono teorie metafisiche che sono *razionali:* razionali perché *criticabili.* E criticabili se è possibile che si scontrino con qualche pezzo di mondo 3 all'epoca consolidato e al quale non siamo disposti a rinunciare (per esempio, una teoria scientifica, una costruzione matematica, un teorema logico, un'altra teoria metafisica ecc.). Ecco, allora - come sottolineato anche da W. Bartley -, che la confutabilità delle teorie scientifiche è solo un caso della più ampia *razionalità,* la quale consiste nell'*atteggiamento critico nei confronti di qualsiasi teoria sia essa scientifica o metafisica:* atteggiamento critico finalizzato alla selezione delle idee buone da quelle cattive[5]. Così, tanto per dare una rapidissima esemplificazione, l'ìnduttivismo - almeno in una sua accezione - crolla *se* è vero che non si dà passaggio logico da una *n* quantunque elevata di osservazioni analoghe reiterate al quantificatore universale `tutti'; il giusnaturalismo risulta invalidato, *se* si accetta la legge di Hume; la dialettica marxista è mitologia, solo che si guardi al fatto che una contraddizione logica è tutt'altra cosa che una contraddizione dialettica - la quale è, invece, un contrasto fattuale, da spiegare tramite teorie non contraddittorie -; il materialismo storico è criticabile in quanto, assolutizzando l'influsso dell'aspetto economico sui fatti storici, trasforma indebitamente un fatto in un'entità metafisica; lo storicismo - inteso come pretesa di cogliere le leggi di sviluppo della storia umana nella sua totalità - è pura superstizione, se è vero (come è vero) che non è possibile la costruzione di un autopredittore scientifico; l'idealismo è un errore totale, se è vera la teoria dell'evoluzione biologica; il neopositivismo non è accettabile perché il principio di verificazione è semplicemente autocontraddittorio»[6].

---

[4] Karl R. Popper, *Poscritto alla logica della scoperta scientifica*, Milano, Il Saggiatore, 1984, vol. 3, pp. 203-204.
[5] W.W. Bartley III, *Ecologia della razionalità*, Roma, Armando 1990, in particolare l'*Introduzione* alla seconda edizione inglese e il capitolo 5 (*Il razionalismo pancritico*).
[6] Dario Antiseri, *Trattato di Metodologia delle Scienze Sociali*, Torino, UTET Libreria, 1996, pp. 231-232. E alle pp. 233-234: «Dalle precedenti considerazioni è possibile ricavare un certo numero di tesi, sintetizzabili nel modo seguente.
1) *Tesi semantica.* Le teorie metafisiche (sull'uomo, sulla storia, sull'universo, ecc.: antropologie filosofiche, filosofie della storia, cosmologie filosofiche, ecc.) non sono affatto dei non-sensi. Sono teorie significative, cioè sensate e comprensibili. Una teoria, insomma, non è priva di senso perché metafisica.
2) *Tesi della rilevanza.* Immagini dell'uomo (l'uomo è anima e corpo, l'uomo è solo corpo; l'uomo è libero, l'uomo è determinato; l'uomo è il suo inconscio, l'uomo è i suoi comportamenti osservabili; ecc.); concezioni della storia (la storia è dominata da una legge di decadenza, la storia si snoda in forza di una legge di progresso; la storia ci mostra l'eterno ritorno dell'identico; la storia è novità emergente; la storia è guidata dalla Provvidenza, la storia è un assurdo senza scopo; ecc.); teodicee e negazioni di Dio; idee filosofiche sullo Stato e sulla società: questi tipi (ed altri ancora, per esempio, le gnoseologie) di idee metafisiche che costituiscono la grande storia del pensiero filosofico sono teorie le più umanamente e socialmente rilevanti: è per queste idee e sulla base di esse che gli uomini conducono la loro vita, vivono e lottano, e spesso anche muoiono. La terra è inzuppata di sangue versato in nome di idee non-falsificabili.
3) *Tesi sulla costituzione della scienza.* Le teorie scientifiche non sono teorie metafisiche. Eppure, senza idee metafisiche la scienza non sarebbe possibile. La scienza è istituita da idee metafisiche: se non si fosse convinti dell'esistenza di una realtà esterna alla mente che indaga; se non si fosse persuasi dello strabiliante fatto che questa realtà esterna è comprensibile dalla mente umana; se non si fosse persuasi che la realtà è, in qualche modo, ordinata, se non si fosse convinti del valore della "verità" scientifica, ecco se non ci fossero queste idee *metafisiche minimali,* la

L'approfondimento di W. Bartley imposta il discorso su di un nuovo paradigma: il paradigma della razionalità, non più del controllo sperimentale: «la confutabilità delle teorie scientifiche è solo un caso della più ampia *razionalità,* la quale consiste nell'*atteggiamento critico nei confronti di qualsiasi teoria sia essa scientifica o metafisica:* atteggiamento critico finalizzato alla selezione delle idee buone da quelle cattive». Questo risultato comporta l'assunzione del paradigma della razionalità, che ricomprende le teorie falsificabili sperimentalmente sotto il medesimo paradigma e non considera le teorie metafisiche come non senso, cioè irrazionali. Viene superato lo scientismo con un'apertura ad considerazione più ampia non solamente della ragione umana, ma della persona umana, che non è riducibile al dato controllabile sperimentalmente!
In sintesi, con Dario Antiseri: «Dunque: una teoria filosofica è razionale se criticabile. La razionalità delle teorie – scientifiche o filosofiche – consiste nella loro criticabilità. La falsificabilità delle teorie scientifiche è, pertanto, un caso della più ampia criticabilità»[7].

2. La conoscenza matematica

Per affrontare il discorso della demarcazione con riferimento alle conoscenze matematiche, premetto il pensiero di Giovanni Prodi su *Matematica e realtà*[8]: «Per parlare del rapporto

---

ricerca scientifica non sarebbe concepibile. Sono idee metafisiche (realismo; comprensibilità del mondo; assioma dell'ordine; valore della verità scientifica) a *istituire* la ricerca scientifica.
4) *Tesi delle metafisiche influenti.* Se idee metafisiche istituiscono la scienza, altre idee influiscono sullo sviluppo della ricerca scientifica. La metafisica scrive Popper «è la fonte da cui rampollano le teorie delle scienze empiriche». Metafisiche influenti sono: l'atomismo antico, il meccanicismo dell'età moderna, il materialismo storico, ecc.
5) *Tesi logica.* Per ogni teoria scientifica controllabile e altamente consolidata possiamo formulare una teoria metafisica che spieghi la teoria scientifica: T (teoria scientifica) vale perché vale M (teoria metafisica). M è incontrollabile, ma *potrebbe* essere vera (anche se al momento non lo sappiamo). Tutto questo ci dice che l'ambito del possibilmente vero non coincide con l'ambito del controllabile e controllato, non coincide con l'ambito delle teorie che, per quanto ne sappiamo, sono confermate.
6) *Tesi storica.* La precedente tesi logica rende conto del fatto storico per cui teorie un tempo metafisiche sono diventate, col passar del tempo e la crescita del sapere di sfondo, teorie scientifiche: l'atomismo, teoria metafisica ai tempi di Democrito, metafisica ancora ai tempi di Newton, è teoria scientifica oggi. Questa tesi si sovrappone in parte, anche se non si identifica, con la tesi 4.
7) *Tesi metodologiche.* Date le precedenti tesi, *se* vogliamo il progresso della scienza, risulta che appaiono funzionali i seguenti imperativi metodologici:
a) cerca di rendere controllabili teorie vigenti costruendo teorie metafisiche in contrasto con siffatte teorie in auge;
b) cerca alternative metafisiche che possono far costruire "fatti" in contraddizione con conseguenze assodate delle teorie vigenti;
c) tenta di rendere scientifica la pseudoscienza;
d) costruisci comunque metafisiche che potrebbero diventare "fisiche", che potrebbero cioè scrivere i programmi della futura ricerca.
E' stato P. K. Feyerabend ad asserire che bisogna fare più metafisica per essere buoni empiristi. Poca metafisica, infatti, ci allontana dalla natura, molta metafisica ci avvicina ad essa: questo pensava Gaston Bachelard.
8) *Tesi della razionalità delle teorie metafisiche.* Una teoria metafisica (ad esempio: il giusnaturalismo, lo storicismo ecc.), sebbene attualmente infalsificabile, può essere razionale; ed è razionale quando è *criticabile,* quando cioè può urtare contro qualche pezzo di mondo 3 (un teorema matematico, una teoria scientifica, un'altra idea metafisica, una scoperta di logica ecc.) all'epoca ben consolidato e al quale non siamo disposti a rinunciare. Ciò non toglie che, di volta in volta, ci possano essere teorie metafisiche non suscettibili di critica razionale, cioè indecidibili in riferimento al mondo 3 a disposizione».

[7] Dario Antiseri, *Cristiano perché relativista, relativista perché cristiano. Per un razionalismo della contingenza,* con una replica di mons. Rino Fisichella e una lettera di Sergio Galvan, Soveria Mannelli, Rubbettino, 2003, p. 53.

[8] Nel 2001, rendendo pubblico per la prima volta questo studio di G. Prodi *Note sulla epistemologia della matematica in rapporto alla scienza nel suo insieme e alla religione* (in *Programmazione curricolare per profili formativi e dialogo tra fede e cultura nei processi di insegnamento e di apprendimento,* a cura di Rosetta Caputi e Bruno Bordignon, 2001), scrivevo: «Ringraziamo sentitamente il prof. Giovanni Prodi dell'Università di Pisa, che ha avuto la cortesia e la disponibilità di inviarci questo pregevole saggio. Esso presenta la matematica come una ricerca aperta, che ha abbandonato un'impossibile esattezza per mettere a punto strumenti procedurali e di calcolo al fine di affrontare la complessità attraverso varie forme di approssimazione. Gödel e Tarski hanno, infine, dimostrato rispettivamente che le regole matematiche non poggiano su regole matematiche e che non è possibile fondare un criterio di verità». Riproporlo qui è un dovere di riconoscenza.

matematica-realtà, mi pare utile una presentazione storica, sia pure con una drastica schematizzazione.
Per un'importante filone del pensiero greco, e in particolare per Platone, la matematica non è separata dalla realtà, ma ne costituisce l'anima razionale; Euclide è influenzato fortemente dalla concezione scientifica e logica di Aristotele; le sue definizioni sono di tipo reale, cioè si propongono di cogliere in modo preciso le suggestioni che la realtà ci offre. Saltando secoli e giungendo all'epoca moderna, vediamo che anche per Galileo non c'è separazione fra matematica e realtà: è la matematica che rende intelligibile la realtà. Lo scienziato deve solo saper cogliere questo carattere razionale profondo scostando quegli impedimenti esterni che possono fare velo.
Una svolta fondamentale si ha con le geometrie non euclidee, all'inizio dell''800; notiamo che la grande difficoltà posta dalle geometrie non euclidee non era di tipo tecnico: teoremi di geometria "assoluta" (cioè di geometria che prescinde dall'assioma della parallela o dalla sua negazione) erano noti da tempo (da parte di Euclide stesso!) ed anche teoremi di geometria non euclidea (Saccheri, Lambert, ...). La difficoltà consisteva nel trovare il coraggio intellettuale per dare legittimità alle geometrie non euclidee sulla base della loro coerenza interna, separando questo problema dal problema della loro validità nella descrizione della realtà naturale. Questo secondo problema esige una preliminare traduzione di significati, che riguarda la fisica e non la matematica: ad esempio un fisico può assumere la retta geometrica come modello astratto di un raggio luminoso, ma può anche impiegare la retta geometrica per descrivere un filo teso. Questa indipendenza della matematica dalla realtà fisica, che viene sancita dalle geometrie non euclidee, non si afferma in modo immediato, come potremmo pensare oggi con il "senno di poi"; ancora alla fine dell''800 troviamo, proprio fra i maggiori geometri italiani (Corrado Segre, Giuseppe Veronese, Giuseppe Peano), una disputa accesa sull'idea di *iperspazio* (cioè spazio di dimensione maggiore di tre, che è la dimensione del nostro spazio fisico). Vediamo in questa disputa come la mancanza di una *realizzazione fisica* di un iperspazio sia ancora un ostacolo per l'accettazione di questo concetto matematico.
Comunque, durante tutto l''800 questo processo di separazione della matematica dalla realtà fisica va accentuandosi, man mano che progredisce la critica interna e man mano che i metodi logici si rafforzano e si diffondono. Dicendo questo, ovviamente, non intendo dire che la matematica, in questa fase storica, non si applichi alla realtà; abbiamo infatti continui e meravigliosi sviluppi in questo senso ma che, in linea di principio, la matematica rivendica la sua autonomia, cioè il suo diritto di autofondarsi. Questa posizione viene affermata con vigore da D. Hilbert, che già negli ultimi anni del secolo scorso aveva presentato la geometria di Euclide in assetto puramente assiomatico. Il programma di Hilbert, di cui abbiamo parlato nel primo punto, prevedeva, come atto finale di questa autolegittimazione della matematica, la dimostrazione in termini finitistici della coerenza, cioè dell'assenza di contraddizione, non solo per l'aritmetica ma anche per la geometria, per l'analisi matematica, ecc.
Come abbiamo visto, la scoperta di Gödel ha dimostrato l'impossibilità del programma di Hilbert. Questo risultato negativo ha aperto una nuova fase nel problema del rapporto matematica-realtà. Infatti, se la matematica non si legittima da sé, dove si può trovare l'origine di quella certezza che l'uomo della strada chiama certezza matematica? Il rapporto matematica-realtà non può essere affrontato con la felice ingenuità della prima fase, ma nondimeno diventa essenziale per la costituzione stessa della matematica. Anche se le costruzioni matematiche (pensiamo alle strutture algebriche, ai gruppi, ...) sono costruzioni autonome del pensiero umano, non si può negare che in esse sia contenuto un filo di realtà; un filo sottile e invisibile, ma di acciaio, che ne garantisce la consistenza.
E, d'altro canto, come spiegare che la matematica è lo strumento principale di indagine scientifica della realtà, se non facendo ricorso a questo filo? Uno dei temi principale dell'epistemologia matematica di questi ultimi decenni è stato appunto la "*irragionevole efficacia della matematica*", secondo il titolo di un celebre articolo del fisico E. P. Wigner pubblicato nel 1960. La capacità non solo descrittiva, ma anche predittiva delle costruzioni matematiche nei confronti della realtà fisica

sembra manifestarsi in modo sempre più esplicito nella storia della scienza. E ben noto che nel 1845 fece sensazione la scoperta, fatta dal Le Verrier del pianeta Nettuno, attraverso le perturbazioni riscontrate nel pianeta Urano; il nuovo pianeta fu trovato dall'astronomo Galle esattamente nella direzione prevista dal calcolo. Mi sembra però molto più sconvolgente la scoperta dell'antiprotone e, più in generale, dell'antimateria operata da P.A.M. Dirac attorno al 1930: in questo caso si trattava di dare senso a certe soluzioni dell'equazione della teoria quantistico-relativistica dell'elettrone, estrapolando la validità dell'equazione stessa. Dunque il carattere sensazionale di questa scoperta è nel fatto che l'equazione stessa, *formalmente intesa*, sembra essere l'espressione e la garanzia del rapporto fra la matematica e la realtà».
Se, come afferma Dario Antiseri, «la falsificabilità delle teorie scientifiche è, pertanto, un caso della più ampia criticabilità» la risposta alle problematiche presentata da Giovanni Prodi è la seguente:

- innanzitutto, può trattarsi di teorie non falsificabili sperimentalmente;
- in secondo luogo, ci possiamo trovare di fronte a teorie per ora non falsificabili sperimentalmente;
- infine, possono esistere teorie matematiche in parte falsificabili sperimentalmente.

Quali suggestioni per l'insegnamento, oltre all'impostazione epistemologica della matematica, che parte sempre da postulati, ed i teoremi di Gödel, si può approfondire il concetto di infinito secondo la proposta di Giovanni Prodi su *Matematica tra finito e infinito:* «Da più di un secolo, con Giorgio Cantor, la matematica ha accolto coraggiosamente entro le sue mura l'idea dell'infinito. Come si sa, il pensiero greco rifuggiva dall'idea di infinito, o indefinito (à-peiron), come era significativamente indicato. Di qui, in ambito geometrico, la restrizione alle sole figure limitate: per Euclide la retta è un segmento, anche se indefinitamente prolungabile, come si vede bene dal modo con cui egli enuncia il parallelismo (due rette si dicono parallele se, *comunque siano prolungate*, non si incontrano). La matematica greca lascia fuori l'idea di numero reale, non perché non ne avverta l'importanza, ma perché il numero reale (pensiamo alla sua rappresentazione mediante infinite cifre) per essere definito ha bisogno di infiniti dati simultaneamente assegnati: cioè ha bisogno dell'infinito *attuale.* Non c'è dubbio che il successo dell'analisi infinitesimale, alla fine del secolo XVII, sia dovuto alla straordinaria potenza dei nuovi metodi: I'importanza e la bellezza dei risultati ottenuti non solo compensavano la mancanza di rigore, ma anzi portavano a vedere nel rigore un inutile freno al progresso. L'avvento (o il ritorno) del rigore, all'inizio dell''800 (con Cauchy, Abel,...) si ha quando questa spontanea avanzata è interrotta da ambiguità e da incertezze di significato che non permettono di proseguire. Nel campo dell'analisi infinitesimale, ci si restringe allora ai procedimenti che fanno uso solamente dell'"infinito potenziale".
A partire dal 1870, G. Cantor che ha una cultura ampia anche sul terreno filosofico, comincia la sua originalissima riflessione sull'idea di *insieme;* scopre diversi livelli di infinito: c'è l'infinito numerabile (quello dell'insieme degli interi naturali) e ci sono gli infiniti di livello più elevato, come l'infinito della retta reale. La teoria degli insiemi di Cantor, che è essenzialmente una teoria dell'infinito, è una grossa conquista; anch'essa però non si sarebbe affermata se non avesse ottenuto grandi successi "sul campo": di fatto, essa ha reso possibile la teoria dell'integrazione, I'analisi funzionale, il calcolo delle probabilità, e ha dato un linguaggio appropriato a tutta la matematica.
Ed ecco una riflessione importante: con l'idea di infinito si vede la matematica debordare dalla pura logica. Non importa qui parlare ampiamente di logica; basta tenere presente che ogni discorso logico, una volta che sia opportunamente formalizzato, è fatto di un numero finito di segni. Qualcuno potrà dire: " ... nulla di strano: anche noi ora stiamo parlando di infinito e tuttavia usiamo un numero finito di parole". Questo è giusto e, del resto, la stessa parola "infinito" non indica un'elencazione, che sarebbe impossibile, ma consiste in una negazione: appunto la negazione di "finito". Possiamo aggiungere che all'interno della teoria di Cantor c'è un modo molto significativo di caratterizzare gli insiemi infiniti: sono quelli che non possono essere posti in corrispondenza biunivoca con un loro sottoinsieme proprio (cioè diverso dall'insieme stesso). Ad esempio, possiamo mettere in corrispondenza biunivoca l'insieme di tutti gli interi naturali: {1, 2, 3, 4, ..., n, ...} con l'insieme dei quadrati: {1, 4, 9, 16, ..., n^2, ...}, che è un sottoinsieme proprio del precedente.

Questo esempio risale a Galileo, e ci attesta la reazione anticonformista di questo nostro genio verso taluni principi accettati in modo acritico dalla scienza ufficiale del suo tempo, come "la parte è minore del tutto" ...
Ritornando ai tempi più recenti, fu Davide Hilbert, la figura dominante nel campo matematico della prima metà del '900, a proporre il seguente programma: parlare rigorosamente dell'infinito, però attraverso un discorso (ovviamente finito) basato su regole rigorose per la manipolazione di simboli logicomatematici. Questo programma, detto appunto "Programma di Hilbert" fu esposto in un articolo, molto bello anche dal punto di vista letterario, pubblicato nel 1925. La condizione che Hilbert poneva come essenziale, e con cui concludeva il suo articolo, era questa: che non ci si limitasse a descrivere un sistema formale capace di trattare l'infinito (diciamo: di trattare perlomeno l'insieme degli interi naturali, che è l'insieme infinito a noi più familiare): la teoria doveva anche dimostrare, sempre con gli stessi metodi finitistici, che un tale sistema formale era privo di contraddizioni.
Ma qualche anno dopo, nel 1931, K. Gödel dimostrava che una tale dimostrazione era impossibile, nel senso che essa avrebbe dovuto coinvolgere, a livello di manipolazione dei simboli, strumenti formali ancora più complessi di quelli che erano alla base della teoria da verificare (in questo caso, l'aritmetica).
Il risultato di Gödel, benché negativo, ha aperto la strada ad una grande quantità di scoperte; qui ci basta ricordare che, nel corso della sua dimostrazione, si presentò spontaneamente il problema di vedere che cosa si può fare concretamente con i mezzi dell'aritmetica (sostanzialmente: addizione, moltiplicazione e uso del principio di induzione). Un logico inglese, A. Turing, attorno al 1938, rese più evidenti queste operazioni, costruendo una macchina (detta appunto *macchina universale di Turing*) che, opportunamente predisposta mediante un programma iniziale, è in grado di eseguire un qualsiasi *algoritmo.* Questa macchina è diventata il modello teorico del calcolatore che oggi vediamo attorno a noi, applicato a svariate attività umane.
Un commento didattico: anche nell'insegnamento secondario l'idea di infinito dovrebbe essere recepita e trovare un suo posto, limitato ma incisivo. Del resto, già un bambino del primo ciclo della scuola elementare, dopo aver esplorato il campo dei numeri noti, fa la domanda tipica: «Qual è il numero più grande che ci sia?». Scopre allora che l'insieme degli interi naturali è infinito; poi trova continue occasioni di incontri con l'infinito: in figure geometriche, nei numeri decimali periodici, ecc. L'unico punto ulteriore da mettere in evidenza nella scuola secondaria superiore è che ci sono insiemi infiniti numerabili e non numerabili. (In Cantor si trova una dimostrazione semplicissima e profonda della non numerabilità del continuo reale, direttamente fondata sulla proprietà di completezza). Disponendo della nozione di infinito numerabile si può presentare elementarmente una buona nozione di area, e si possono mettere le basi elementari del calcolo delle probabilità. Ma c'è un punto particolarmente importante, che sta alla base concettuale della teoria degli algoritmi e, perciò, alla base dell'informatica: la dimostrazione che esistono (anzi, sono di gran lunga prevalenti) le successioni di interi naturali che non sono calcolabili (cioè che non si possono produrre con un calcolatore, pur assegnando ad esso una memoria potenzialmente illimitata). Infatti, I'insieme dei possibili programmi (e, pertanto, delle successioni calcolabili) è un insieme numerabile, mentre l'insieme di tutte le successioni ha il numero cardinale del continuo. Questa scoperta, pur essendo semplice tecnicamente, ha un grandissimo valore filosofico perché ci dice che la nostra mente ha capacità di concepire l'esistenza di enti infiniti, che pure non riesce a descrivere e a trattare materialmente»[9].

Bruno Bordignon

[9] Si veda la nota precedente.