

NOTE SULLA EPISTEMOLOGIA DELLA MATEMATICA

di **GIOVANNI PRODI** dell'*Università di Pisa*

In rapporto alla scienza nel suo insieme e alla religione.

Ringraziamo sentitamente il prof. Giovanni Prodi dell'Università di Pisa, che ha avuto la cortesia e la disponibilità di inviarci questo pregevole saggio. Esso presenta la Matematica come una ricerca aperta, che ha abbandonato un'impossibile esattezza per mettere a punto strumenti procedurali e di calcolo al fine di affrontare la complessità attraverso varie forme di approssimazione. Godei e Tarski hanno, infine, dimostrato rispettivamente che le regole matematiche non poggiano su regole matematiche e che non è possibile fondare nessun criterio di verità. Riteniamo che il saggio del prof. Giovanni Prodi possa essere inserito facilmente nel quadro di riferimento rappresentato dai seguenti saggi:

- *Dialogo tra cultura e fede. Appunti introduttivi;*
- *Verso un profilo del docente;*
- *Insegnamento delle discipline scientifiche. Parte generale;*
- *Insegnamento delle discipline scientifiche. Le singole discipline.*

Premessa

Le riflessioni che qui espongo hanno i seguenti obiettivi:

- a) migliorare l'insegnamento della matematica puntando, fin dove la difficoltà non lo proibisce, sulle idee più grandi e più ricche di fascino;
- b) approfondire il raccordo della matematica con le altre materie, aumentando l'interesse per la cultura e contribuendo alla formazione umana dei giovani;
- c) vedere con umile e sincera ricerca della verità se anche in questo campo Dio abbia lasciato alcune orme, riconoscibili almeno da coloro che hanno già l'animo ben disposto.

Detto ciò, devo aggiungere che non mi sento in grado di approfondire il discorso proprio là dove esso si fa più generale e interessante: non sono né filosofo né teologo. Tuttavia in questi campi mi sforzerò ugualmente di esprimere qualche riflessione spontanea, nella speranza di comunicare, almeno, alcune impressioni e convinzioni che provengono da una lunga consuetudine. Comincio presentando «dal di dentro» alcuni aspetti della matematica, come la vediamo oggi. Dico subito che non credo né possibile né utile dare una definizione della matematica; in passato si parlava della matematica come *la scienza della quantità*. Oggi questa definizione ci appare limitativa, ed anche scarsamente significativa perché il termine *quantità* risulta vago. Piuttosto che tentare una nuova definizione, cercherò allora di presentare alcune tesi sui caratteri della matematica di oggi, premettendo che questa connotazione di attualità non vuole riferirsi ad una moda, ma piuttosto ad una visione odierna più ampia, anche se più problematica, che sembra includere armonicamente la ricchezza di tutta la storia precedente. Prendo allora come punto di partenza il particolare tipo di

evoluzione storica e di progresso che caratterizza la matematica. La matematica è essenzialmente conservatrice, non si sviluppa con quei bruschi cambiamenti di quadro che sono tipici di altre scienze: tutti i risultati importanti della matematica (mi verrebbe da dire: i risultati belli, dal momento che forse il criterio estetico è quello più valido) vengono conservati; in certi casi vengono conservati esattamente negli stessi termini, con la stessa dimostrazione (penso alla proposizione di Euclide sull'infinità dell'insieme dei numeri primi: non vedo come si potrebbe fare anche oggi una dimostrazione più semplice ed elegante!). In altri casi la cornice cambia, ma non cambia il valore e la sostanza. Penso, ad esempio, alla geometria di Euclide. che oggi si può mettere su basi assiomatiche più eleganti e meno farra-ginose di quelle di Euclide, sostituendo la tecnica basata sui criteri di uguaglianza dei triangoli con quella, ben più potente ed espressiva, delle isometrie. Questo mutamento di cornice è in generale dovuto a due motivazioni: da un lato una maggiore esigenza di rigore (indubbiamente, negli ultimi due secoli siamo diventati assai più esigenti di quanto fossero gli scienziati dei tempi di Euclide), dall'altro la necessità di una economia di pensiero. Infatti, se non si potessero rendere più compatti e generali i risultati della matematica, alla lunga, proprio per il carattere conservativo che ha questa scienza, avremmo un tale ingombro di informazione da non poter più procedere.

Detto questo, il mio primo compito è quello di tentare di dire «dove va la matematica oggi». Cercherò di farlo in forma dialettica, mettendo in evidenza, da vari punti di vista, due poli contrapposti, che richiedono una compenetrazione ed un'armonizzazione:

1. Matematica tra finito e infinito.
2. Matematica fra complessità e probabilità.
3. Matematica fra rigore e fantasia.
4. Matematica e realtà.

Per ciascuno di questi aspetti cercherò di mettere in luce alcune implicazioni didattiche e culturali. Dopo questa rassegna, sarà più facile allargare l'orizzonte culturale, riflettendo sul ruolo che può avere la matematica nella formazione dell'uomo. Infine, con un po' di coraggio intellettuale, cercheremo di dire qualcosa sull'apporto della matematica e, più in generale della scienza, per la ricerca di Dio.

1. Matematica tra finito e infinito

Da più di un secolo, con Giorgio Cantor, la matematica ha accolto coraggiosamente entro le sue mura l'idea dell'infinito. Come si sa, il pensiero greco rifuggiva dall'idea di infinito, o indefinito (*apeiron*), come era significativamente indicato. Di qui, in ambito geometrico, la restrizione alle sole figure limitate: per Euclide la retta è un segmento, anche se indefinitamente prolungabile, come si vede bene dal modo con cui egli enuncia il parallelismo (due rette si dicono parallele se, *comunque siano prolungate*, non si incontrano). La matematica greca lascia fuori l'idea di numero reale, non perché non ne avverta l'importanza, ma perché il numero reale (pensiamo alla sua rappresentazione mediante infinite cifre) per essere definito ha bisogno di infiniti dati simultaneamente assegnati: cioè ha bisogno dell'infinito *attuale*. Non c'è dubbio che il successo dell'analisi infinitesimale, alla fine del secolo XVII sia dovuto alla straordinaria potenza dei nuovi metodi: l'importanza e la bellezza dei risultati ottenuti non solo compensavano la mancanza di rigore, ma anzi portavano a vedere nel rigore un inutile freno al progresso. L'avvento (o il ritorno) del rigore, all'inizio dell'800 (con Cauchy, Abel ...) si ha quando questa spontanea avanzata è interrotta da ambiguità e da incertezze di significato che non permettono di proseguire. Nel campo dell'analisi infinite-simale, ci si restringe allora ai procedimenti che fanno uso solamente dell'« infinito potenziale

». A partire dal 1870. G. Cantor che ha una cultura ampia anche sul terreno filosofi-co, comincia la sua originalissima riflessione sull'idea di *insieme*; scopre diversi livelli di infinito: c'è l'infinito numerabile (quello dell'insieme degli interi naturali) e ci sono gli infiniti di livello più elevato, come l'infinito della retta reale. La teoria degli insiemi di Cantor, che è essenzialmente una teoria dell'infinito, è una grossa conquista; anch'essa però non si sarebbe affermata se non avesse ottenuto grandi successi «sul campo»: di fatto, essa ha reso possibile la teoria dell'integrazione, l'analisi funzionale, il calcolo delle probabilità, e ha dato un linguaggio appropriato a tutta la matematica. Ed ecco una riflessione importante: con l'idea di infinito si vede la matematica debordare dalla pura logica. Non importa qui parlare ampiamente di logica; basta tenere presente che ogni discorso logico, una volta che sia opportunamente formalizzato, è fatto di un numero finito di segni. Qualcuno potrà dire: «... nulla di strano: anche noi ora stiamo parlando di infinito e tuttavia usiamo un numero finito di parole». Questo è giusto e, del resto, la stessa parola « infinito » non indica un'elencazione, che sarebbe impossibile, ma consiste in una negazione: appunto la negazione di «finito». Possiamo aggiungere che all'interno della teoria di Cantor c'è un modo molto significativo di caratterizzare gli insiemi infiniti: sono quelli che non possono essere posti in corrispondenza biunivoca con un loro sottoinsieme proprio (cioè diverso dall'insieme stesso). Ad esempio, possiamo mettere in corrispondenza biunivoca l'insieme di tutti gli interi naturali: $\{1,2,3,4,$

$.... n, ... \}$ con l'insieme dei quadrati : $\{1,4,9,16,..., n^2,...\}$, che è un sottoinsieme proprio del precedente. Questo esempio risale a Galileo, e ci attesta la reazione anticonformista di questo nostro genio verso taluni principi accettati in modo acritico dalla scienza ufficiale del suo tempo, come « la parte è minore del tutto »...

Ritornando ai tempi più recenti, fu Davide Hilbert, la figura dominante nel campo matematico della prima metà del '900, a proporre il seguente programma: parlare rigorosamente dell'infinito, però attraverso un discorso (ovviamente finito) basato su regole rigorose per la manipolazione di simboli logicomatematici. Questo programma, detto appunto « Programma di Hilbert » fu esposto in un articolo, molto bello anche dal punto di vista letterario, pubblicato nel 1925. La condizione che Hilbert poneva come essenziale, e con cui concludeva il suo articolo, era questa: che non ci si limitasse a descrivere un sistema formale capace di trattare l'infinito (diciamo: di trattare perlomeno l'insieme degli interi naturali, che è l'insieme infinito a noi più familiare): la teoria doveva anche dimostrare, sempre con gli stessi metodi finitistici, che un tale sistema formale era privo di contraddizioni.

Ma qualche anno dopo, nel 1931, K. Godel dimostrava che una tale dimostrazione era impossibile, nel senso che essa avrebbe dovuto coinvolgere, a livello di manipolazione dei simboli, strumenti formali ancora più complessi di quelli che erano alla base della teoria da verificare (in questo caso, l'aritmetica). Il risultato di Godel, benché negativo, ha aperto la strada ad una grande quantità di scoperte: qui ci basta ricordare che, nel corso della sua dimostrazione, si presentò spontaneamente il problema di vedere che cosa si può fare concretamente con i mezzi dell'aritmetica (sostanzialmente: addizione, moltiplicazione e uso del principio di induzione). Un logico inglese, A. Turing, attorno al 1938, rese più evidenti queste operazioni costruendo una macchina (detta appunto *macchina universale di Turing*) che, opportunamente predisposta mediante un programma iniziale, è in grado di eseguire un qualsiasi *algoritmo*. Questa macchina è diventata il modello teorico del calcolatore che oggi vediamo attorno a noi, applicato a svariate attività umane. Un commento didattico: anche nell'insegnamento secondario l'idea di infinito dovrebbe essere recepita e trovare un suo posto, limitato ma incisivo. Del resto, già un bambino del primo ciclo della scuola elementare, dopo aver esplorato il campo dei numeri noti, fa la domanda tipica: « Qual è il numero più grande che ci sia? ». Scopre allora che l'insieme degli interi naturali è infinito: poi trova

continue occasioni di incontri con l'infinito: in figure geometriche, nei numeri decimali periodici, ecc. L'unico punto ulteriore da mettere in evidenza nella scuola secondaria superiore è che ci sono insiemi infiniti numerabili e non numerabili. (In Cantor si trova una dimostrazione semplicissima e profonda della non numerabilità del continuo reale, direttamente fondata sulla proprietà di completezza). Disponendo della nozione di infinito numerabile si può presentare elementarmente una buona nozione di area, e si possono mettere le basi elementari del calcolo delle probabilità. Ma c'è un punto particolarmente importante, che sta alla base concettuale della teoria degli algoritmi e, perciò, alla base dell'informatica: la dimostrazione che esistono (anzi, sono di gran lunga prevalenti) le successioni di interi naturali che non sono calcolabili (cioè che non si possono produrre con un calcolatore, pur assegnando ad esso una memoria potenzialmente illimitata). Infatti, l'insieme dei possibili programmi (e, pertanto, delle successioni calcolabili) è un insieme numerabile, mentre l'insieme di tutte le successioni ha il numero cardinale del continuo. Questa scoperta, pur essendo semplice tecnicamente, ha un grandissimo valore filosofico perché ci dice che la nostra mente ha capacità di concepire l'esistenza di enti infiniti, che pure non riesce a descrivere e a trattare materialmente.

2. Matematica fra complessità e probabilità

Dopo questa escursione nell'infinito, ritorniamo al livello del calcolabile, che è quello della nostra operatività umana, meravigliosamente potenziata dal calcolatore. Ogni calcolo esige l'impiego di risorse: dispositivi di calcolo e di memoria, ma soprattutto la risorsa *tempo*. La quantità minima di un certo tipo di risorsa necessaria per fare un calcolo (in particolare: il tempo minimo) può essere presa come indice della complessità del calcolo. Pertanto, non vi

è un unico tipo di complessità. Lo studio della complessità è uno dei temi più affascinanti della matematica di oggi. Ci accorgiamo facilmente che vi sono calcoli possibili teoricamente, che però non lo sono in pratica, o che richiedono comunque drastiche schematizzazioni e grossi strumenti per essere realizzati: è il caso, ad esempio delle previsioni del tempo atmosferico, che, per essere utili, devono essere eseguite in tempo brevissimo. La nostra società presenta in forma sempre più frequente e preoccupante, la necessità di fare previsioni per «grandi sistemi», come sistemi economici, ecologici, ecc.; e si parla spesso di *cultura della complessità* per indicare un atteggiamento mentale attento a questi nuovi fenomeni e ai limiti che essi pongono all'uomo moderno, il quale vorrebbe controllare situazioni che gli appaiono ormai alla sua portata, ma che praticamente non riesce ancora a dominare.

Ma vorrei prendere un esempio di complessità dall'interno della matematica stessa. Un problema classico, ma anche molto attuale per certe applicazioni, è: *decidere se un certo numero molto grande (ad esempio, di qualche centinaio di cifre decimali) è primo, o no*. Come si sa, basta verificare che esso non sia divisibile per alcun numero primo che non superi la sua radice quadrata; però ci si accorge subito che se il numero è molto grande.

questa via è impraticabile: l'ingombro di memoria e il tempo di esecuzione diventano inaccettabili. Ma, circa 15 anni fa, sono stati trovati certi algoritmi molto interessanti, di complessità piuttosto piccola, con cui la primalità del numero viene stabilita, ma non con certezza: soltanto con un elevato grado di probabilità. Precisamente, il numero viene posto sotto inchiesta, sulla base di certi *test* aritmetici: se la risposta è «no», il numero è certamente composto; altrimenti, se il numero supera molti *test*, non si può affermare che esso sia primo ma la probabilità che non lo sia diventa estremamente piccola. Ho riportato questo esempio non perché io pensi che esso possa avere direttamente un posto nell'insegnamento secondario, ma perché è indicativo del ruolo sempre più importante che il calcolo delle probabilità sta assumendo anche all'interno della matematica. Il calcolo delle

probabilità ha finora avuto poca fortuna nella nostra scuola; a parte le indubbie difficoltà che esso presenta per l'insegnante (difficoltà che molte volte sono legate alla situazione sempre più frequente in un ambiente culturale in evoluzione di un insegnante che deve presentare ai suoi allievi ciò che egli non ha imparato da studente), vi è il pregiudizio che esso sia limitato a certi giochetti un po' strani, o che comunque sia legato a situazioni fisiche o sociali di tipo aleatorio. Al contrario, come mostra il nostro esempio, il calcolo delle probabilità ha a che fare con la nostra conoscenza e con i limiti ad essa posti dalla complessità. Esso è lo strumento più ragionevole su cui fondare quella cultura della complessità di cui parlavamo, e che sembra, nel bene e nel male, il destino dell'uomo di oggi. A proposito di probabilità, un progresso importante è stato compiuto circa venti anni fa. indipendentemente, da S. Kolmogorov e da G. Chaitin, un giovane studente americano: è stata data una definizione molto interessante di *successione casuale*. Alla base di questa definizione c'è la macchina di Turing di cui abbiamo parlato e che può essere benissimo impersonata dal calcolatore, a cui siamo già abituati (o ci stiamo abituando). Riflettiamo che, secondo la nostra intuizione, siamo portati a considerare *regolare* una successione descritta con una legge semplice, (ad esempio, una successione periodica di periodo abbastanza breve, come la successione 1.2.3.1.2.3, 1,2,3, 1,2,3,...). Una tale successione si presta ad essere generata da un calcolatore con un programma di poche istruzioni. Viene allora spontaneo, nella situazione opposta, chiamare *casuale* (cioè disordinata) una successione che non può essere generata con un programma sensibilmente più breve della successione stessa. Questa definizione, che mette in rapporto fra loro due campi interessanti come la probabilità e l'informatica ha un evidente interesse e si sta rivelando molto utile.

3. Matematica fra rigore e fantasia

Questo tema ha stretti legami con i precedenti. La matematica è per eccellenza il regno del rigore e della sicurezza argomentativa, dell'oggettività. In passato queste sono state le caratteristiche su cui si è fondata principalmente la funzione educativa della matematica. Ma ci si è accorti sempre più chiaramente che, se la logica è la regola sintattica del linguaggio come è la metrica per la poesia tradizionale, essa non ne costituisce il contenuto o il messaggio. L'approfondimento nello studio della logica e l'impiego del calcolatore ci hanno insegnato che in un testo di matematica si deve distinguere la *verifica della correttezza* di una dimostrazione che, al limite, potrebbe essere fatta anche da un calcolatore dalla *strategia* della dimostrazione, che richiede inventiva, fantasia o, perlomeno, forme raffinate di astuzia. La matematica, liberata dagli aspetti più banali e ripetitivi, si avvicina molto all'arte. Ci sono nella letteratura matematica dimostrazioni talmente imprevedibili ed eleganti da entusiasmare. Veramente, il confine fra ciò che è automatico, cioè realizzabile con un algoritmo, e ciò che si deve riservare all'ingegnosità umana non è, in pratica, facile; confesso di essere rimasto sorpreso, qualche anno fa, nel constatare che quelle astuzie di calcolo che un tempo costituivano il piatto forte di un corso universitario di analisi matematica (mi riferisco, ad esempio a quelle impiegate per il calcolo elementare degli integrali), sono diventate materia di calcolo automatico, a livello di complessità abbastanza modesto: un programma come il «Derive», che può essere contenuto in un dischetto è molto usato anche nella Scuola Secondaria Superiore, fa queste operazioni molto facilmente; non parliamo poi del calcolo algebrico elementare. C'è da rimanere pensosi riflettendo su ciò. Non vale mettere al bando i calcolatori in nome di principi pedagogici (come fanno certi insegnanti che impiegano ancora le tavole logaritmo-trigonometriche). Il fatto è che il calcolatore sia che lo usiamo, sia che non lo usiamo ha modificato profondamente la scala dei valori nella nostra attività matematica. Il calcolatore ci insegna che occorre dare rilievo alla progettazione più che al

calcolo, alla facoltà euristica più che all'esattezza. Spesso si attribuisce al calcolatore la grave responsabilità di ridurre la matematica ad una pura routine, mettendo in ombra tutti gli aspetti concettuali. Ma tutto dipende dal modo con cui lo si adopera: l'accusa di provocare appiattimento può essere fondata se il calcolatore viene applicato per operazioni standard e solo tramite «pacchetti» già confezionati; al contrario, la costruzione di un programma può essere collocata fra le attività più creative ed artistiche che sono oggi a portata di mano, pur con mezzi relativamente modesti. La matematica di oggi mette perciò in evidenza insospettabili aspetti irrazionali che fanno appello a categorie estetiche. Tutti i nuovi programmi delle nostre scuole (media, elementare, biennio e, tra poco, certamente anche triennio) mettono l'accento sulla fase euristica e sulla risoluzione dei problemi. Naturalmente, la risoluzione di problemi deve confluire nella fissazione di metodi e di teorie: un insegnamento condotto solo per problemi diventerebbe occasionale e frammentario, e lascerebbe una scarsa traccia. Tuttavia è didatticamente utile, quando si può, partire da problemi. Si ravvisa allora la necessità di una didattica che porti l'allievo ad un'attività euristica. Evidentemente, questa tendenza va contro tutto l'insegnamento tradizionale. Questo è fondato su ben determinati compiti esecutivi, che certamente sono più comodi da eseguire e da valutare, e che pertanto costituiscono un canone fisso del «*contratto didattico implicito*» fra insegnante ed allievo. E esempio della scuola media, dove la maggioranza degli insegnanti preferisce anticipare il non richiesto calcolo algebrico piuttosto che svolgere attività di carattere intuitivo-euristico. È significativo. Mi torna qui a proposito sottolineare come l'insegnamento dell'informatica, ancorché attuale, può benissimo essere svolto in modo da accordarsi pienamente con l'insegnamento tradizionale, inteso nel peggiore dei sensi: mi pare anzi che sia molto diffuso un modo pedante di presentare l'informatica come un complesso di regole fisse ancora più fisse di quelle dell'algebra senza mai mostrare le grandi idee su cui è fondata, e, nello stesso tempo, senza portare i ragazzi ad impostare liberamente problemi intelligenti e vari sul calcolatore.

Certamente, non voglio dire che sia facile costruire questa nuova didattica. Sul versante dell'insegnante vi è la necessità di acquistare nuove abilità sconosciute all'insegnante tradizionale. Dall'altro lato vi è il pericolo che si allarghi la « forbice » fra gli allievi più bravi e quelli meno bravi, anche se non è affatto detto che i bravi e i non bravi rimangano quelli dell'insegnamento tradizionale. Vorrei anche osservare che, in una didattica innovativa, la valutazione dell'errore è tutta diversa da quella tradizionale. Vi sono certamente molti errori stupidi, dovuti ad inerzia mentale, a banale disattenzione, ma vi sono anche errori intelligenti, o, almeno, accettabili sul piano delle intenzioni, su cui l'insegnante può fare leva.

4. Matematica e realtà

Per parlare del rapporto matematica-realtà, mi pare utile una presentazione storica, sia pure con una drastica schematizzazione.

Per un importante filone del pensiero greco, e in particolare per Piatone, la matematica non è separata dalla realtà, ma ne costituisce l'anima razionale; Euclide è influenzato fortemente dalla concezione scientifica e logica di Aristotele: le sue definizioni sono di tipo reale, cioè si propongono di cogliere in modo preciso le suggestioni che la realtà ci offre. Saltando secoli e giungendo all'epoca moderna, vediamo che anche per Galileo non c'è separazione fra matematica e realtà: è la matematica che rende intelligibile la realtà. Lo scienziato deve solo saper cogliere questo carattere razionale profondo scostando quegli impedimenti esterni che possono fare velo.

Una svolta fondamentale si ha con le geometrie non euclidee, all'inizio dell'800; notiamo che la grande difficoltà posta dalle geometrie non euclidee non era di tipo tecnico: teoremi di geometria «assoluta» (cioè di geometria che prescinde dall'assioma della parallela o dalla sua negazione) erano noti da tempo (da parte di Euclide stesso!) ed anche teoremi di geometria non euclidea (Saccheri, Lambert,...). La difficoltà consisteva nel trovare il coraggio intellettuale per dare legittimità alle geometrie non euclidee sulla base della loro coerenza interna, separando questo problema dal problema della loro validità nella descrizione della realtà naturale. Questo secondo problema esige una preliminare traduzione di significati, che riguarda la fisica e non la matematica: ad esempio un fisico può assumere la retta geometrica come modello astratto di un raggio luminoso, ma può anche impiegare la retta geometrica per descrivere un filo teso. Questa indipendenza della matematica dalla realtà fisica che viene sancita dalle geometrie non euclidee non si afferma in modo immediato, come potremmo pensare oggi con il «senno di poi»; ancora alla fine dell'800 troviamo, proprio fra i maggiori geometri italiani (Corrado Segre, Giuseppe Veronese, Giuseppe Peano), una disputa accesa sull'idea di *iperspazio* (cioè spazio di dimensione maggiore di tre, che è la dimensione del nostro spazio fisico). Vediamo in questa disputa come la mancanza di una *realizzazione fisica* di un iperspazio sia ancora un ostacolo per l'accettazione di questo concetto matematico. Comunque, durante tutto l'800 questo processo di separazione della matematica dalla realtà fisica va accentuandosi, man mano che progredisce la critica interna e man mano che i metodi logici si rafforzano e si diffondono. Dicendo questo, ovviamente, non intendo dire che la matematica, in questa fase storica, non si applichi alla realtà, abbiamo infatti continui e meravigliosi sviluppi in questo senso ma che, in linea di principio, la matematica rivendica la sua autonomia, cioè il suo diritto di autofondarsi. Questa posizione viene affermata con vigore da D. Hilbert, che già negli ultimi anni del secolo scorso aveva presentato la geometria di Euclide in assetto puramente assiomatico. Il programma di Hilbert, di cui abbiamo parlato nel primo punto, prevedeva, come atto finale di questa autolegittimazione della matematica, la dimostrazione in termini finitistici della coerenza, cioè dell'assenza di contraddizione, non solo per l'aritmetica ma anche per la geometria, per l'analisi matematica, ecc.

Come abbiamo visto, la scoperta di Godei ha dimostrato l'impossibilità del programma di Hilbert. Questo risultato negativo ha aperto una nuova fase nel problema del rapporto matematica-realtà. Infatti, se la matematica non si legittima da sé, dove si può trovare l'origine di quella certezza che l'uomo della strada chiama certezza matematica? Il rapporto matematica-realtà non può essere affrontato con la felice ingenuità della prima fase, ma nondimeno diventa essenziale per la costituzione stessa della matematica. Anche se le costruzioni matematiche (pensiamo alle strutture algebriche, ai gruppi ...) sono costruzioni autonome del pensiero umano, non si può negare che in esse sia contenuto un filo di realtà; un filo sottile e invisibile, ma di acciaio, che ne garantisce la consistenza.

E, d'altro canto, come spiegare che la matematica è lo strumento principale di indagine scientifica della realtà, se non facendo ricorso a questo filo? Uno dei temi principali dell'epistemologia matematica di questi ultimi decenni è stato appunto la "*irragionevole efficacia della matematica*", secondo il titolo di un celebre articolo del fisico E. R. Wigner pubblicato nel 1960. La capacità non solo descrittiva, ma anche predittiva delle costruzioni matematiche nei confronti della realtà fisica sembra manifestarsi in modo sempre più esplicito nella storia della scienza. E ben noto che nel 1845 fece sensazione la scoperta, fatta dal Leverrier, del pianeta Nettuno, attraverso le perturbazioni riscontrate nel pianeta Urano; il nuovo pianeta fu trovato dall'astronomo Galle esattamente nella direzione prevista dal calcolo. Mi sembra però molto più sconvolgente la scoperta dell'antiprotone e, più in generale, dell'antimateria operata da P. A.M. Dirac attorno al 1930: in questo caso si trattava di dare

senso a certe soluzioni dell'equazione della teoria quantistico-relativistica dell'elettrone, estrapolando la validità dell'equazione stessa. Dunque il carattere sensazionale di questa scoperta è nel fatto che l'equazione stessa, "*formalmente intesa*" sembra essere l'espressione e la garanzia del rapporto fra la matematica e la realtà.

Cerchiamo ora di sviluppare anche su questo punto alcune osservazioni di carattere didattico. In questo dopoguerra, fino alla fine degli « anni sessanta ». nelle situazioni (rare nel nostro paese, più comuni in altri, come la Francia) in cui si è tentato un rinnovamento della matematica, si è prodotta una didattica orientata fortemente verso l'astrazione e l'assiomatizzazione: alludiamo a quella corrente d'ispirazione prevalentemente Bourbakista, che si autodefiniva «matematica moderna». L'idea dominante era che il primo essenziale passo nell'apprendimento della matematica fosse il possesso delle strutture matematiche astratte. Questa concezione era la conseguenza della separazione tra la matematica e la realtà, che abbiamo visto affermarsi a partire dalla scoperta delle geometrie non euclidee. Ma oggi emerge sempre più chiaramente che anche l'insegnamento della matematica non può prescindere dal rapporto con la realtà. non solo e non tanto per le applicazioni, quanto per le radici stesse della matematica, che affondano nella realtà. Non è un caso che la geometria sia stata la disciplina matematica più bistrattata dalla «matematica moderna» (e non è un caso che la geometria continui ad essere bistrattata nella nostra scuola). Se nella geometria si vedono solo i risultati formali finali, e non lo sforzo di descrivere lo spazio che ci circonda partendo dall'esperienza, allora possono avere ragione coloro che riducono la geometria ad un sistema formale privo di significati. Ma noi, al contrario, pensiamo che la geometria abbia ben altra ricchezza: riteniamo che avesse ragione Henri Poincaré nell'affermare che la Geometria è il primo capitolo della fisica.

5. La matematica nell'educazione globale

Ci domandiamo ora quale apporto specifico può dare la matematica alla formazione della persona. Questa domanda è importante anche perché, se questo apporto è essenziale, ne deriva la necessità di una componente matematica anche nei piani di studio del settore umanistico. Come abbiamo detto, la risposta tradizionale è che la matematica, per sua interna struttura, crea un *habitus* di razionalità, di oggettività, quindi anche di correttezza nei rapporti interpersonali. Questo è senza dubbio vero, tuttavia abbiamo visto che l'attività matematica quando sia ben condotta richiede anche fantasia, senso estetico e capacità di vedere cose consuete con occhi nuovi. Queste qualità sono di solito viste come specifiche dell'educazione artistica: possiamo allora affermare che una matematica ben insegnata e praticata può attenuare molto quel contrasto fra le « due culture » di cui tanto si è parlato. Ma allora, qual è lo specifico educativo della matematica? Direi che nella matematica il controllo del risultato è assai più immediato e stringente, rispetto a quello che si dà in altre materie, specialmente nel settore letterario. Ne segue che la tensione intellettuale verso la meta è forte. Chi ha fatto esperienza di ricerca matematica (anche a livello elementare, ma impegnandosi su un problema serio) sa che nella tensione verso la soluzione la mente si modifica e si affina, fino a creare strumenti di indagine e strategie che originariamente non sussistevano. Alcuni grandi matematici (ad esempio Poincaré) ci hanno lasciato suggestive testimonianze di lavoro intellettuale durato anche a livello inconscio per parecchi mesi, prima di poter giungere ad una importante scoperta. Esperienze di questo tipo si trovano evidentemente anche nella creazione artistica, ma sono forse più rare e privilegiate, mentre nell'attività matematica sono relativamente comuni. Questo è il motivo per cui la matematica

è vista come singolare palestra intellettuale. Ciò, a sua volta, ha importanti conseguenze che ora cercherò di presentare.

Anzitutto, l'attività matematica richiede sforzo (e anche, non di rado una certa sofferenza, se vogliamo essere sinceri). Si dice che Euclide rispondeva al re Tolomeo, desideroso di imparare un po' di matematica, ma, nello stesso tempo, poco disposto a faticarvi, *che non esiste una via regia per la geometria*. L'argomento è di estrema attualità. Infatti, l'attività di insegnamento e di educazione si svolge oggi in un contesto in cui, o per il concorso di circostanze sociali o per esplicita intenzionalità, è stata eliminata dalla vita dei giovani ogni difficoltà ed ogni motivo di sofferenza. E significativo anche il mutamento intervenuto nella valutazione del lavoro e della fatica: fino alla metà del secolo XX il lavoro materiale veniva considerato come faticoso e umiliante, e, in contrapposizione, il lavoro intellettuale veniva considerato come privilegiato. Oggi, al contrario, l'accesso all'istruzione secondaria superiore e universitaria da parte di larghe masse di giovani ha messo in luce 1 insospettata durezza del lavoro intellettuale, e particolarmente di quello matematico. Così accade che molti giovani, specialmente nel nostro paese, da un lato, con il proseguire gli studi, tagliano i ponti con i settori più pratici e concreti delle attività umane, dall'altro finiscono per sperimentare la loro inadeguatezza al lavoro intellettuale.

In questa situazione che abbiamo descritto in modo necessariamente crudo qual è il ruolo pedagogico tipico dell'insegnante di matematica? Direi che è quello della *pedagogia della montagna*. Con questa espressione intendo la capacità di indurre l'allievo a qualche piccolo sforzo iniziale, cercando però subito di fargli gustare la gioia del successo. (L'insegnante di matematica deve anche essere in grado di fare gustare la *bellezza del paesaggio*). A poco a poco e in modo differenziato da allievo ad allievo, possono crescere sia lo sforzo sia la gratificazione. L'insegnante non deve accettare, e soprattutto non deve comunicare, la convinzione che ci siano allievi portati e allievi negati per la matematica. Precisamente, l'essere portati per la matematica sembra dipendere più che dall'intelligenza in senso assoluto, da un certo fascino che la persona avverte per certi problemi, e da un certo tipo di tenacia con cui risponde. La riprova di questa tesi sta nel fatto che esistono anche se sono per fortuna rari allievi che, pur non avendo le doti intellettuali adeguate, scommettono tutto sulla matematica; in questi casi, l'insuccesso in matematica può avere ripercussioni anche gravi sull'equilibrio psichico. In conclusione: l'attività matematica mobilita un ampio gioco di reazioni affettive ed emotive, che l'insegnante deve essere in grado di avvertire e di utilizzare al meglio. Personalmente, sono un po' critico verso un insegnamento apprendimento che si svolga in un clima di eccessiva competizione: è meglio che ciascun allievo si misuri solo con se stesso.

Oggi il calcolatore si presenta come uno strumento importantissimo; si tratta però di uno strumento ambivalente. Il calcolatore può spegnere anzitempo la curiosità con una eccessiva visualizzazione, oppure offrire una potenza di calcolo troppo sproporzionata rispetto al problema: in questo modo esso può uccidere prematuramente il problema e vanificare *l'insegnamento per problemi*. Al contrario, l'insegnante dovrebbe stimolare l'allievo a costruire da sé qualche piccolo programma, con tutta la creatività di cui è capace.

Nella dinamica delle varie materie, vi è il rischio che la matematica per quelle caratteristiche di oggettività di cui abbiamo detto rimanga la sola a cui è deferito il compito della verifica e della selezione. È importante che nei consigli di classe ci si renda conto che la matematica può avere l'ingrato compito di mettere in evidenza i mali e le contraddizioni che sono presenti anche nelle altre materie. ma sono in esse più facilmente occultabili. Questa è una situazione spiacevole. che può portare l'insegnante di matematica

all'isolamento, e che invece deve essere superata mediante lo spirito di collaborazione e di collegialità.

6. Un discorso che non si può confinare

Dopo aver abbozzato un discorso generale e pedagogico sulla matematica, domandiamoci dove esso può portarci riguardo al problema centrale della nostra vita spirituale: riconoscere Dio. Ci sono appigli intellettuali propri della matematica ?

Non credo, anzitutto, che si possa sperare di arrivare a Dio mediante una dimostrazione «more geometrico». E vero che l'abitudine al ragionamento matematico produce una specie di fiducia nell'esistenza di entità che pure sono sottratte ai nostri sensi: ma questo vantaggio dei matematico è di ordine più psicologico che ontologico. Comunque, è almeno vero che i matematici di solito non sono attratti dal materialismo. Ad esempio, ho presenti ben pochi matematici che durante la lunga fase del Comunismo sia nei paesi occidentali sia nell'Unione Sovietica abbiano sentito una sincera attrazione per il Marxismo. Ricordo, anzi, che negli «anni settanta», mentre nel nostro paese persino i teologi cercavano di ispirarsi al Marxismo, un matematico di Mosca, Igor Shafarevich, dichiarava che solo la religione poteva dare senso e compimento alla speculazione matematica.

Una riflessione approfondita sul pensiero matematico suscita stupore, soprattutto per quegli aspetti che riguardano l'infinito, e su cui ci siamo già trattenuti. Se la mente umana si riducesse al suo cervello e se questo si riducesse ad una macchina di Turing, apparirebbe strano che questo cervello fosse in grado di concepire l'idea di infinito. Non so se i risultati del tipo del teorema di Godei potranno essere impiegati come strutture portanti di un rinnovato pensiero metafisico: mi pare tuttavia che essi suggeriscano spontaneamente un'analogia: come il matematico dopo Godei non perde la fiducia nell'aritmetica per il fatto che non può dimostrarne la coerenza, anzi sa che la dimostrazione di questa impossibilità si fonda proprio sulla coerenza dell'aritmetica intuitivamente accettata, così il credente pensoso sa che, se Dio c'è esso non entrerà in campo come un teorema che viene dimostrato in un sistema formale. Al contrario, l'incontro con Dio sarà come l'avvento di un mondo più grande a cui l'uomo può solo partecipare, e solo riconoscendo i limiti della sua partecipazione. C'è dunque un'audacia speciale in questo pensiero metafisico, ma c'è anche una straordinaria fecondità, come è stato fecondo il pensiero logicomatematico che ha preso l'avvio dal teorema di impossibilità di Godei. Ma l'apertura verso Dio diventa più spontanea e più sicura quando, anziché considerare un'unica scienza sia pure antichissima e ricca di fascino come la matematica si cerca un'interazione ed una sintesi fra le varie scienze. E vero che in questo caso si rinuncia alla tutela e all'esattezza che i metodi consolidati di ciascuna scienza possono fornire, ma si ha il vantaggio di un'argomentazione che parla un linguaggio più espressivo e meno tecnico. Allora, un punto fondamentale da cui partire consiste in quel rapporto matematica-realtà che abbiamo esaminato e su cui abbiamo registrato la meraviglia di tanto scienziati. Per chi non esclude a priori una visione religiosa, l'intelligibilità del mondo si riconduce spontaneamente all'unità della creazione: uno stesso Dio è autore della materia inanimata, della materia viva e della mente dell'uomo. Questa era la convinzione profonda di tutti i grandi fondatori della scienza moderna, da Galileo a Newton. Tuttavia questa tesi oggi richiede un approfondimento ulteriore: non può dar luogo ad una ingenua «dimostrazione» diretta dell'esistenza di Dio, ma è piuttosto un elemento importante da assumere sul piano teologico per chi ha l'animo aperto a questo varco. L'altra cautela simmetrica con cui occorre assumere questa tesi è che in nessun caso questo riconoscimento del «dito di Dio» nella creazione può essere una scorciatoia sul piano scientifico, cioè può

tenere il ruolo di una spiegazione scientifica: se mai potrà essere uno stimolo a cercare questa spiegazione più a fondo, con maggiore fiducia nell'intelligibilità della natura, per la convinzione che dove la Scrittura dà all'uomo il potere di dominare la natura, è proprio a questo dominio della mente che si fa' implicito riferimento, più che ad un dominio di sfruttamento materiale, e il cielo stellato o la grandiosità di un evento naturale hanno da sempre suggerito all'uomo l'esistenza di una mente superiore. tanto più impressionanti e stupendi risultano i dati della meccanica quantistica, dell'astrofisica o della biologia molecolare di cui oggi disponiamo. Si pone allora il problema che più ci angustia: come mai, fra gli uomini di oggi, specialmente nei paesi più industrializzati, c'è una forte componente di atei e. più ancora, di agnostici? Cercherò di dare una risposta limitandomi agli aspetti cognitivi, anche se il problema di Dio coinvolge tutto l'uomo.

Nel valutare l'incidenza della scienza sulla fede, nella concreta situazione culturale di oggi, penso che la difficoltà non sia tanto nell'accettazione di Dio Creatore quanto dalla simultanea esperienza del problema del male. Il conflitto vero si genera quando accanto all'esperienza della perfezione del Creatore si prende coscienza del dolore, delle incongruenze, della morte. In particolare, la morte viene avvertita, sul piano della conoscenza, come una necessità biologica di ogni vivente, anzi di una opportunità della natura per far posto ad altri esseri, nell'indefinito divenire della vita; la maggiore sensazione che ha l'uomo di oggi di essere elemento della natura rende più evidente questa necessità. Ma, nello stesso tempo, l'uomo che ha imparato a dominare la natura e a superare ogni barriera che gli è stata imposta, avverte in modo ancora più tragico, e quasi con il senso di un'ingiustizia, il peso incombente della morte. Insomma, penso che oggi vi sia un ateismo o almeno un agnosticismo diffuso, che ha le sue origini inconse non tanto in una radicale rifiuto di Dio quanto in una inconciliabilità di Dio Creatore con Dio Padre. Pascal sentiva già questo contrasto quando contrapponeva al Dio dei saggi del suo tempo il Dio di Abramo, di Isacco, di Giacobbe. Al contrario, la religiosità di Einstein che pure era un tema ricorrente nei sermoni dei predicatori di cinquanta anni fa mi dice ben poco: il Dio di Einstein è un Dio infinitamente sapiente che tutto ha predisposto, un Dio che *non gioca ai dadi*, ma che perderebbe la sua dignità se si occupasse dei problemi di un piccolo essere effimero come sono io. Sono difficoltà che ogni credente incontra e che esigono forse nuove riflessioni su peccato originale. Comunque, si dovrà fare sempre appello alla fede. Mi è accaduto, nel mettere assieme questi pensieri, di riflettere al finale del libro di Giobbe. Dopo essere stato chiamato in causa tanto dal sofferente Giobbe quanto dai suoi presuntuosi amici, Dio fa diciamo così un'autodifesa facendo appello alla sua perfezione di Creatore: partendo da questa chiede all'uomo di avere fiducia in lui anche dove sembra che regni l'irrazionalità e l'ingiustizia. Il discorso di Dio è lungo, e tira in ballo tutte le conoscenze della natura che gli uomini di quell'epoca potevano avere. La parte più ampia è dedicata ad una galleria di animali che comprende il cervo, l'onagro, il bufalo, lo struzzo, il cavallo, l'aquila, l'ippopotamo, il coccodrillo: questo imprevedibile discorso di Dio ha toni di finissimo umorismo. Oggi Dio potrebbe ricordarci le equazioni della meccanica quantistica, il DNA. ecc.; ma potrebbe anche aggiungere che persino il mistero degli interi naturali è noto solo a lui. E vero che per noi cristiani c'è Uno di cui Giobbe è solo figura: è il Signore Gesù che ha sofferto in croce e che è risorto: dobbiamo ricordare una frase del prologo del vangelo di Giovanni che lo riguarda e che viene forse poco meditata: " *Nulla senza di lui è stato fatto di ciò che è stato fatto* ».

NOTE BIBLIOGRAFICHE

L'articolo citato di Hilbert (1925) è stato tradotto in: CELLUCCI, *"Filosofia della matematica"* (Ed. Laterza).

Sul tema matematica-realtà si veda l'articolo di GABRIELE LOLLI, *Matematica e realtà*, in *Scientia* (1985).

Per chi voglia un'introduzione ampia ed espressiva ai contenuti più classici della matematica: R. COURANT - H. ROBBINS, *Che cos'è la matematica?* (Ed. Boringhieri).

Segnaliamo infine le due seguenti opere di carattere antologico, che possono essere utili per accostare i giovani ai grandi matematici del passato:

C.F. MANARA - G. LUCCHINI, *Momenti del pensiero matematico* (Ed. Mursia),

U. BOTTAZZINI - P. FREGUGLIA - L. TOTI RIGATELLI, *Fonti per la storia della matematica* (Ed. Sansoni).

Sul rapporto Scienza-Religione-, segnaliamo:

E. AGAZZI, *Scienza e fede* (Ed. Massimo);

I. GALLEN, *Scienza e teologia* (Ed. Queriniana);

S. L. JAKI, *La strada della scienza e le vie verso Dio* (Ed. Jaka Book 1994).